

算例 2-008

壳 – 悬臂板特征值问题

问题描述

在本例中，对一个悬臂方形板进行了分析，以得到其前五个板弯曲振型的周期。将 SAP2000 得到的周期与基于 Harris and Crede 1976 一书的数据的手算结果进行了比较。

该板为厚 1in.，边长 24in.的正方形板。板上施加了 $7.35\text{E-}07 \text{ k-sec}^2/\text{in}^3$ 的单位面积质量。这是本问题中唯一的质量。

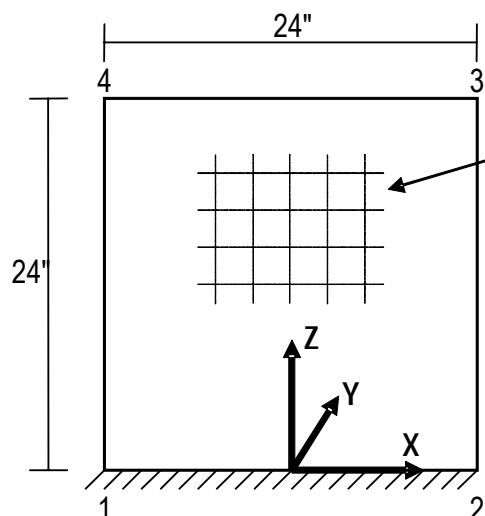
在三个模型中，采用了不同的剖分方法求解。模型 A、B 和 C 分别剖分为 10x10、20x20 和 40x40 单元。采用一个单个的面对象建立模型，采用 SAP2000 中的自动面剖分来生成这些网格。

板位于 XZ 平面。因为只需要板弯曲振型，所以模型中只有 U_y , R_x , and R_z 自由度是活动的，这样将其性态约束成为板弯曲。将节点 1、2 的 U_y and R_x 自由度约束了。

自动面剖分具有一个特殊的选项，如果两个面对象的相邻角点的某个自由度被约束，可以将约束施加到面对象边上的新节点（有剖分产生）的该自由度上。在本例中使用了该特殊功能，这样可以提供沿整个板底的约束。

PROGRAM NAME: SAP2000
 REVISION NO.: 0

几何特性和属性



模型

模型 A: 10x10 网格
 模型 B: 20x20 网格
 模型 C: 40x40 网格

自由度

U_y, R_x, R_z

节点约束

节点 1: U_y, R_x
 节点 2: U_y, R_x

几何属性

长度 = 24 in
 宽度 = 24 in
 厚度 = 1 in

材料属性

$E = 29,000 \text{ k/in}^2$
 $\nu = 0.3$

板密度

$7.35\text{E-}07 \text{ k-sec}^2/\text{in}^3$

所测试的 SAP2000 技术要点：

- 采用壳元时的特征值分析
- 面对象质量指定
- 面对象自动剖分
- 面对象刚度修正

结果比较

采用了 Harris and Crede 1976 一书 7-30 页表 7.7 计算得到了手算解。分别列出了采用薄板选项和厚板选项时的 SAP2000 的结果。

采用薄板选项时

输出参数	模型和剖分	SAP2000	手算解	差值百分比
周期 振型 1 sec	A 10 x 10	0.01743	0.01723	+1.2%
	B 20 x 20	0.01737		+0.8%
	C 40 x 40	0.01735		+0.7%
周期 振型 2 sec	A 10 x 10	0.00717	0.00704	+1.8%
	B 20 x 20	0.00710		+0.9%
	C 40 x 40	0.00708		+0.6%
周期 振型 3 sec	A 10 x 10	0.00288	0.00281	+2.5%
	B 20 x 20	0.00284		+1.1%
	C 40 x 40	0.00283		+0.7%
周期 振型 4 sec	A 10 x 10	0.00228	0.00219	+4.1%
	B 20 x 20	0.00223		+1.8%
	C 40 x 40	0.00222		+1.4%
周期 振型 5 sec	A 10 x 10	0.00200	0.00193	+3.6%
	B 20 x 20	0.00196		+1.6%
	C 40 x 40	0.00195		+1.0%

PROGRAM NAME: SAP2000
REVISION NO.: 0

采用厚板选项时

输出参数	模型和剖分	SAP2000	手算解	差值百分比
周期 振型 1 sec	A 10 x 10	0.01746	0.01723	+1.3%
	B 20 x 20	0.01740		+1.0%
	C 40 x 40	0.01739		+0.9%
周期 振型 2 sec	A 10 x 10	0.00721	0.00704	+2.4%
	B 20 x 20	0.00714		+1.4%
	C 40 x 40	0.00712		+1.1%
周期 振型 3 sec	A 10 x 10	0.00290	0.00281	+3.2%
	B 20 x 20	0.00286		+1.8%
	C 40 x 40	0.00285		+1.4%
周期 振型 4 sec	A 10 x 10	0.00230	0.00219	+5.0%
	B 20 x 20	0.00225		+2.7%
	C 40 x 40	0.00223		+1.8%
周期 振型 5 sec	A 10 x 10	0.00202	0.00193	+4.7%
	B 20 x 20	0.00198		+2.6%
	C 40 x 40	0.00197		+2.1%

计算模型文件: Example 2-008a-thick, Example 2-008a-thin,
Example 2-008b-thick, Example 2-008b-thin,
Example 2-008c-thick, Example 2-008c-thin,
Example 2-008d-thick

结论

采用薄板和厚板选项时，SAP2000 与手算解的差异都是可以接受的。进一步剖分模型时，结果间的差异会更小。

采用厚板选项的板收敛于一个比薄板周期更高的周期。这表明采用厚板选项的结构的刚度将比采用薄板结构的刚度略微偏小。这种差异源于厚板选项包括了面外剪切变形，而薄板选项没有考虑该效应。

可以通过对厚板采用剪切刚度修正以使其面外剪切变形可以忽略，然后与薄板结果进行对比，可证明这一点。除剪切刚度修正 v_{13} 和 v_{23} 设置为 1000 以外，模型 D-Thick 与 Model C-Thick 是相同的。下表列出了模型 D-Thick 的结果。

采用厚板选项时 - Model D (40 x 40 网格 采用刚度修正)

振型	参数	SAP2000	手算解	差值百分比
1	周期 sec	0.01735	0.01723	+0.7%
2	周期 sec	0.00708	0.00704	+0.6%
3	周期 sec	0.00283	0.00281	+0.7%
4	周期 sec	0.00222	0.00219	+1.4%
5	周期 sec	0.00195	0.00193	+1.0%

模型 D-Thick 与 C-Thin 的结果是相同的。这表面厚板与薄板的区别在于厚板考虑了剪切变形。

通过梁振型近似估计板振型得到了手算解。手算解不考虑面外剪切变形。SAP2000 模型中，周期收敛于一个比手算结果略高的值。该差别是因为手算解本质上是一个非完备解，具有近似性。

手算过程

Reference: Harris and Crede 1976
Table 7.7, page 7-30

$$\omega_n = B_n \sqrt{\frac{D}{\rho a^4 t}}$$

ω_n = circular frequency

B_n = constant (see below)

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

ρ = mass density (force-sec²/length⁴)

a = length of side of square plate

t = plate thickness

Mode	B_n
1	3.494
2	8.547
3	21.44
4	27.46
5	31.17

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{29000 \times 1^3}{12(1-0.3^2)} = 2655.678$$

$$\omega_n = B_n \sqrt{\frac{D}{\rho A^4 t}} = B_n \sqrt{\frac{2655.678}{7.35E-07 \times 24^4 \times 1}}$$

$$\omega_n = 104.357 B_n$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{104.357 B_n} = \frac{0.060209}{B_n}$$

Mode	B_n	T_n (sec)
1	3.494	0.01723
2	8.547	0.00704
3	21.44	0.00281
4	27.46	0.00219
5	31.17	0.00193